בוחן אמצע, סמסטר חורף תשע"ח -אלגברה 1/מ, 104016
27.11.17

ת"ז :

פקולטה :

- משך הבוחן : 2 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-2** יש **לנמק** היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב.
בשאלות 3-6 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון.
בשאלה 7 יש לסמן אם הטענה נכונה או לא נכונה במקום המתאים בשאלה. סימון נכון מזכה ב- 3 נקודות. סימון לא נכון לא מזכה בנקודות.
- **אין צורך לרשום נימוקים בשאלות 3-7.**
- סימון של יותר מתשובה אחת יגרור ציון 0 על השאלה (בשאלות 3-6) וציון 0 על הסעיף (בשאלה 7).

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 3-6

	שאלה מס' 3	שאלה מס' 4	שאלה מס' 5	שאלה מס' 6
א.				
ב.				
ג.				
ד.				
ה.				

<u>שאלה מס' 1</u> : (24 נקודות)

נתונה מערכת המשוואות הבאה בשלושה נעלמים ממשיים x, y, z.
k, m פרמטרים ממשיים.

$$\begin{pmatrix} 1 & k & m \\ k & k^2+k-1 & km+k-1 \\ 3 & 3k & 4m+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k^2+m+1 \\ 3k+m+1 \end{pmatrix}$$

א. לאילו ערכים של k, m יש למערכת פתרון יחיד?
ב. לאילו ערכים של k, m אין למערכת פתרון?
ג. לאילו ערכים של k, m יש למערכת אינסוף פתרונות?
ד. מצאו את הפתרון הכללי של המערכת בכל המקרים בהם למערכת יש אינסוף פתרונות.
ה. נתון שלמערכת יש אינסוף פתרונות עם 2 דרגות חופש. מצאו במקרה זה שני פתרונות שונים למערכת בהם $x=1$.

פתרון

נדרג את מטריצת המקדמים המורחבת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & m & k \\ k & k^2+k-1 & km+k-1 & k^2+m+1 \\ 3 & 3k & 4m+1 & 3k+m+1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - kR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & m & k \\ 0 & k-1 & k-1 & m+1 \\ 0 & 0 & m+1 & m+1 \end{array}\right)$$

מאחר ומספר המשוואות שהן לא הכל 0 שווה למספר הנעלמים הרי שפתרון יחיד קיים אם"ם כל איבר מוביל שונה מ- 0 כלומר אם"ם: $k \neq 1$, $m \neq -1$.
לגבי שני מקרים אלה נציב ונבדוק:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & m & k \\ 0 & k-1 & k-1 & m+1 \\ 0 & 0 & m+1 & m+1 \end{array}\right) \underset{k=1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \\ 0 & 0 & m+1 & m+1 \end{array}\right)$$

לפי שורה 2, אם $m \neq -1$ מתקיים $r(A|b) > r(A)$ ולכן אין פתרון ואילו עבור $m=-1$ נקבל $r(A|b) = r(A) = 1 < 3 = n$ כלומר נקבל אינסוף פתרונות עם $3-1=2$ דרגות חופש.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & m & k \\ 0 & k-1 & k-1 & m+1 \\ 0 & 0 & m+1 & m+1 \end{array}\right) \underset{m=-1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

במקרה זה קיבלנו כי $r(A|b) = r(A)$ לכל k ולכן יש אינסוף פתרונות. כאמור עבור $k=1$ יש 2 דרגות חופש ועבור $k \neq 1$ נקבל שמספר דרגות החופש הוא: $3-2=1$.
סיכום:

א. פתרון יחיד: לכל $k \neq 1$ וגם $m \neq -1$.
ב. אין פתרון עבור: $k=1$ וגם $m \neq -1$.

ג. אינסוף פתרונות עבור: $m=-1$ וגם $k=1$ ואז יש 2 דרגות חופש, או $m=-1$ וגם $k\neq 1$ ואז יש דרגת חופש אחת.

ד. פתרון כללי לשני המקרים בהם יש אינסוף פתרונות:
מקרה ראשון: $m=-1$ וגם $k=1$ אז נקבל את המשוואה: $x+y-z=1$ ולכן הפתרון הוא:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

מקרה שני: $m=-1$ וגם $k\neq 1$. נוכל לחלק ב- k-1 ולקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & k \\ 0 & k-1 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & -1 & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1-k & k \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x-(1+k)z=k \\ y+z=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+k)z+k \\ -z \\ z \end{pmatrix}$$

ה. נתון שלמערכת יש אינסוף פתרונות עם 2 דרגות חופש. לפי סעיף ד' הפתרון במקרה זה הוא:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}$. נתון ש- x=1 לכן $1-y+z=1$ או $y=z$. שני פתרונות שונים הם למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<u>שאלה מס' 2</u> : (30 נקודות)

הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית (במקרה של מתן דוגמא נגדית, יש להסביר מדוע זו דוגמא נגדית מספרית) :

א. אם $A\,,\,B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ שתי מטריצות אנטי סימטריות ושונות מ- 0, אז A ו- B שקולות שורה.

טענה נכונה : מטריצות 2x2 אנטי סימטריות נראות כך : $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$. אם $A\neq 0$ בהכרח $a\neq 0$.

לכן הדרוג של כל מטריצה אנטי סימטרית ששונה מ- 0 יהיה :

$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{a\neq 0,\, R_1\to\frac{1}{a}R_1 \\ R_2\to -\frac{1}{a}R_2}}{\to} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{R_1\leftrightarrow R_2}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. קיבלנו כי כל המטריצות האנטי סימטרית ששונות מ-0 שקולות שורה למטריצת היחידה מסדר 2 ולכן שקולות שורה בניהן.

נימוק אחר : $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ וכן מהנתון $A\neq 0$ מתקיים $a\neq 0$. באותו אופן $B=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ וכן מהנתון $B\neq 0$ מתקיים $b\neq 0$ ולכן : $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_1\to\frac{b}{a}R_1 \\ R_2\to -\frac{b}{a}R_2}}{\to} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ לכן שקולות שורה.

ב. לכל $z,w\in\mathbb{C}$ מתקיים $|z+w|^2-|z-\overline{w}|^2=4\cdot\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Re}(w)$.

טענה נכונה: ניתן להוכיח ע"י הצבת $z=a+ib\ ,\ w=x+iy$ אבל נוכיח באמצעות חוקי הצמוד והמודול :

$$|z+w|^2-|z-\overline{w}|^2=(z+w)\overline{(z+w)}-(z-\overline{w})\overline{(z-\overline{w})}=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})-(z-\overline{w})(\overline{z}-w)=$$
$$=|z|^2+z\overline{w}+w\overline{z}+|w|^2-|z|^2+zw+\overline{z}\overline{w}-|w|^2=z\overline{w}+zw+w\overline{z}+\overline{z}\overline{w}=z(\overline{w}+w)+\overline{z}(w+\overline{w})=$$
$$=(\overline{w}+w)(z+\overline{z})=2\,\mathrm{Re}(w)\cdot 2\,\mathrm{Re}(z)=4\cdot\mathrm{Re}(z)\cdot\mathrm{Re}(w)$$

ג. האוסף $U=\left\{(z,w)\in\mathbb{C}^2\,\middle|\,2z=3\overline{w}\right\}$ הוא תת מרחב וקטורי של $\mathbb{C}^2$ מעל $\mathbb{C}$.

טענה לא נכונה: אין סגירות לכפל בסקלר : נבחר : $v=(3,2)$. מתקיים $v\in U$ כי $2\cdot 3=3\cdot\overline{2}=3\cdot 2$. נבחר $\alpha=i\in\mathbb{C}$ אז הווקטור $\alpha v=i(3,2)=(3i,2i)\notin U$ כי $2\cdot 3i=6i\neq 3\cdot\overline{2i}=3\cdot 2\cdot(-i)=-6i$.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 6-3 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 3</u> : (7 נקודות)

יהי $p(z)=z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0$ כאשר $a_3,a_2,a_1,a_0\in\mathbb{R}$. נתון כי $z_1=i$ הוא שורש של $p(z)$, וכן $z_2=4$ הוא המספר הממשי **היחידי** המקיים $p(4)=0$. אזי:

א. $p(1)=16$; ב. $p(1)=20$; ג. $p(2)=16$; ד. $p(2)=18$; ה. $p(3)=10$.

<u>שאלה מס' 4</u> : (7 נקודות)

יהיו z_1,z_2,z_3,z_4,z_5 כל 5 הפתרונות של המשוואה $z^5=(-1-i)^4$ כך ש:

$0^\circ\le\arg(z_1)<\arg(z_2)<\arg(z_3)<\arg(z_4)<\arg(z_5)<360^\circ$. אזי $z_2\cdot z_4$ שווה ל:

א. $\sqrt[5]{16}$; ב. $\sqrt[5]{16}\cdot cis288^\circ$; ג. $\sqrt[5]{16}\cdot cis324^\circ$; ד. $-\sqrt[5]{16}$; ה. $\sqrt[5]{16}\cdot cis36^\circ$.

הסבר:

<u>שאלה מס' 5</u> : (7 נקודות)

יהי $V=\mathbb{R}^{2\times2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 מעל $\mathbb{R}$. אז הקבוצה היחידה המהווה תת מרחב וקטורי של V היא:

א. אוסף כל המטריצות ב V שהן סימטריות או אנטי סימטריות.

ב. אוסף כל המטריצות A ב V המקיימות $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

ג. אוסף כל המטריצות A ב V המקיימות $A^2=0$.

ד. אוסף כל המטריצות A ב V המקיימות $A\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}A^t$.

ה. אוסף כל המטריצות A ב V שאינן שקולות שורה ל- I_2 .

שאלה מס' 6 : (7 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ כך ש:

$$A\begin{pmatrix}1&1&\alpha\\2&1&\beta\\3&1&\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

יהי $b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, אזי:

א. למערכת $A\bar{x}=b$ יש אינסוף פתרונות לכל α,β,γ.

ב. אם למערכת $A\bar{x}=b$ יש אינסוף פתרונות אזי $\alpha=\beta=\gamma$.

ג. קיימים α,β,γ עבורם למערכת $A\bar{x}=b$ אין פתרון.

ד. למערכת $A\bar{x}=b$ יש פתרון יחיד לכל α,β,γ.

ה. אם $\alpha=\beta=\gamma=1$ אז למערכת $A\bar{x}=b$ יש פתרון יחד.

שאלה מס' 7 : (18 נקודות)

עבור כל אחת מהטענות הבאות החליטו האם היא נכונה או לא נכונה, וסמנו את התשובה במקום המתאים בטבלה (אין צורך לנמק. נימוקים לא ייבדקו). יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על הסעיף.

טענה	נכון	לא נכון
1. ניתן לפתור כל מערכת משוואות לינארית $A\bar{x}=0$ ע"י ביצוע פעולות אלמנטריות על עמודות A.		✓
2. לכל מטריצה ריבועית A מתקיים $rank(A)=rank(A^2)$.		✓
3. אם $0\neq v\in\mathbb{C}^{n\times1}$ אזי $r\left(v\cdot v^{t}\right)=r\left(v^{t}\cdot v\right)$.		✓
4. אם למערכת $A\bar{x}=b$ אין פתרון אז למערכת $A\bar{x}=0$ יש אינסוף פתרונות.		✓
5. אם $z,w\in\mathbb{C}$ כך ש $z\neq w$ אבל $\lvert z\rvert=\lvert w\rvert$ אז $\frac{z+w}{z-w}$ מדומה טהור.	✓	
6. אם D אלכסונית ו- B אנטי סימטרית אז $D^{2018}-5B^{2018}$ סימטרית.	✓	